کسر متعارفی، تفکر نسبیتی و بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان

در رابطه با کسرها

ناصر اسکندری، دبیر ریاضی شهرستان‌های استان
تهران و کارشناس ارشد آموزش ریاضی
زهرا گویا، دانشگاه شهیدبهشتی

چکیده

در ایــن مقاله، ابتدا پیشــینهٔ مفهوم کســر ارائه می‌شود. ســپس، ساختارهای کســری مورد مطالعه قرار می‌گیرد، آن‌گاه به یافته‌های بعضی از تحقیقات انجام شده در رابطه با بدفهمی و تعبیرهای نادرست دانش‌آموزان در حوزه کســر و تفکر نســبیتی، اشاره می‌شود.

کلیدواژه‌هــا: کســر، ســاختارهای کســری، بدفهمی، تفکر نسبیتی[1]

۱. مقدمه

نتایــج ارزیابی‌های بومی، ملــی و بین‌المللی در موضوع عملکرد دانش‌آموزان در حل مسائل کسری، نشان داده است که یادگیری مفهوم کسر برای آن‌ها دشــوار اســت (مورداک[2] و اســتیوارت، ۲۰۰۵)، در حالی‌که آنان، قبل از ورود به مدرســه، با این مفهوم آشــنایی دارند. مثلاً کودکان در انواع مقایســه‌هایی که انجام می‌دهند، به‌نوعی از تفکر کســریِ «جزیی از کل» اســتفاده می‌کنند. گاهی در شــروع آموزش رسمی، این درک شــهودی در تقابل با درک رسمی قــرار می‌گیرد و یادگیرنده را دچار مشــکل می‌کند. بدین‌ســبب، انجام تحقیقات در حوزه کســر و تفکر نســبیتی، برای آشــنایی با نوع تفکر دانش‌آموزان و بدفهمی‌هــای احتمالی آنان کمــک می‌کند تا بتوان برای توسعه این نوع تفکر و کاهش بدفهمی‌ها نسبت به کسر، راهکارهای مؤثری اندیشید. (همان، ۲۰۰۵)

۲. مفهوم کسر

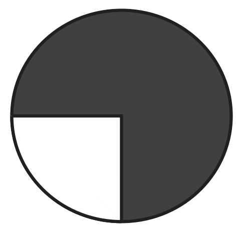
کســرها، بســته بــه موقعیت‌هایی که اســتفاده می‌شوند، می‌توانند نشان‌دهندهٔ معانی مختلفی باشند. استیوارت[3] (۲۰۰۵، به نقل از اولسن[4]، ۱۹۸۸)، درک معنی کســر را با توجه به ارتباط بین مفهوم انتزاعی کســر و جایگاه استفاده از کســر معرفی می‌کند. به گفته لامون (۱۹۹۹)، چون کسرها زیرمجموعه‌ای از اعداد گویا هســتند، یعنی نســبت دو عدد صحیح به هم، به شــرط آنکه مخرج کســر صفر نباشد توسعه تفکر نسبیتی، باعث فهم بهتر اعداد گویا و به تبع آن، کسرها می‌شــود، همان چیزی که قبلاً نیز فرودنتال (۱۹۸۳ نقل شده در استیوارت ۲۰۰۵) نشان داد که کسرها، منشأ شکل‌گیری مفهومی اعداد گویا هستند. در هر صورت، هر دو تحقیق، بر ارتباط مفهومی بین اعداد گویا و کسرها تأکید دارند و از یافته‌های آن‌ها، می‌تــوان نتیجه گرفت که هر دو مفهوم، به توســعه یکدیگر کمک می‌کنند.

بــه دلیــل ایــن اهمیــت تام‌کی‌یِــرِن[5] (۱۹۷۶) مطالعات بسیاری در حوزه مفهوم کسرها انجام و یکی از اصلی‌ترین یافته‌های وی این بود که ســاختار کسر را تقسیم به پنج زیرساختار اصلی رابطه جزء به کل[6]، اندازه[7]، عملگر[8]، خارج‌قسمت[9] و نسبت[10] نمود که هر

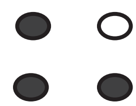
کـدام، با وجود نقش‌هــای متفاوتی که دارند، به هم مرتبط‌اند. وی با اســتفاده از مثال $\frac{۳}{۴}$، هر یک از این زیرساختارها را به شکل زیر شرح داده است.

۲-۱. رابطه جزء به کل

کسر عبارت اســت از تقسیم یک مقدار پیوسته یا مجموعه‌ای از موضوعات گسســته، بــه مجموعه‌ها یا زیرمجموعه‌هایی با اجزای مساوی. به‌عنوان مثال، کسر $\frac{۳}{۴}$ می‌تواند نشــان‌دهندهٔ سه برش مســاوی از کیکی باشــد که به ۴ قسمت مساوی تقسیم شده است (مدل پیوسته) و یا می‌تواند نشانگر ۳ تخم‌مرغ از ۴ تخم‌مرغی باشد که در سبد قرار دارد. (مدل گسسته) این دو تعبیر از $\frac{۳}{۴}$ را می‌توان به شکل‌های زیر نشان داد:



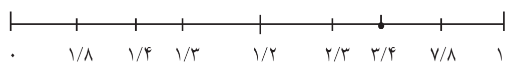
$\frac{۳}{۴}$ کیک



$\frac{۳}{۴}$ تخم‌مرغ‌ها

۲-۲. اندازه

در این زیرســاختار، کســر به موقعیت یک عدد روی محور اعداد یا یک خط‌کش، اطلاق می‌شود.



۲-۳. عملگر

وقتی کســر به عنوان یــک تبدیل در نظر گرفته می‌شــود، در واقع نقــش عملگر را دارد. مثلاً کســر $\frac{۳}{۴}$، به‌عنوان یک عملگر برای به دست آوردن ۳ جزء از یک شــی یا مقدار، تعریف می‌شود، یا اینکه $\frac{۳}{۴}$ از ۱۲، عدد ۹ را نتیجه می‌دهد.

۲- ۴. خارج قسمت

زمانی که کســر به عنوان «نتیجه تقسیم کردن» تعریــف می‌شــود، یعنــی در موقعیــت زیرســاختار خارج‌قســمت واقع شده است، دراین حالت کسر $\frac{۳}{۴}$ به‌صورت تقسیم ۳ بر ۴ است، مثل اینکه ۳ کیک بین ۴ نفر به تساوی قسمت شود.

۲- ۵. نسبت

نســبت، بیانگر رابطهٔ بین دو مقدار اســت، مثل رابطهٔ بین تعداد بســته‌های شکلات و مقدار پولی که باید برای آن‌ها پرداخت شــود. بدین‌معنا، کســر یک نســبت اســت، به‌طوری که صورتْ جزء و مخرجْ کل باشــد. ولی باید توجه داشــت که در نســبت، ممکن است هم صورت و هم مخرج، جزء باشند.

۳. تفکر نسبیتی در یادگیرندگان

لامــون[11] (۲۰۰۷)، اشــاره می‌کنــد کــه تفکر نسبیتی؛ شامل یافتن، توضیح دادن و تحلیل مناسبِ ارتباط‌هاست. به گفته پیاژه و اینهلدر (۱۹۷۵)، تفکر نسبیتی یک رابطهٔ مرتبه دو شامل یک رابطهٔ معادل بین دو نسبت است، مانند این‌که هر کدام از کسرهای $\frac{c}{d}$ و $\frac{a}{b}$ یک رابطه هستند که تساوی بین آن‌ها نیز، رابطه دوم است (به نقل از لو[12] و واتانابه[13]، ۱۹۹۷).

لش، پســت و بِــر[14] (۱۹۸۸) دریافتنــد که برای طراحــی رویکردی جامع به تدریس کســر، توجه به پنج زیرســاختاری که تام کی‌یِــرن (۱۹۷۶) معرفی کرده بود، ضروری اســت. برای چنین تدریسی، لازم اســت زمینه‌ها و بازنمایی‌های مناسبی فراهم شود تا به توسعهٔ تفکر نسبیتی نیز کمک کند.

تورنیر و پولوس (۱۹۸۵، نقل شده در سند مرکز همکاری‌های ال‌پاسو برای تعالی آموزشی[15]، ۲۰۰۷)، در مــروری بــر مطالعات انجام شــده در زمینه تفکر نسبیتی، دریافتند که بزرگ‌سالان نیز مانند کودکان، در تفکر نسبیتی ضعیف‌اند. در همین سند نقل شده اســت که در ایــالات متحده به‌طور مســتمر، نمرات دانش‌آموزان در «ارزیابی ملی پیشــرفت تحصیلی[16]» و در مسائل مربوط به استدلال نسبیتی، پایین است. در «ســومین مطالعه بین‌المللــی ریاضیات و علوم» (تیمز) هم، مشابه این نتایج به دست آمده است. این در حالی اســت که از نظر پَریش، اِســپَرو، کی‌سِین و هورســت[17](۲۰۰۶)، تفکر نســبیتی، ستون فقرات یادگیری ریاضی و مبنایی برای موفقیت دانش‌آموزان در ریاضیات ســطح بالا به شمار می‌رود، هم‌چنان که یکی از پایه‌های ریاضیات دوره ابتدایی نیز به‌حســاب می‌آید.

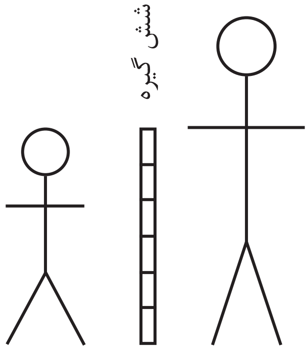
به دلیل این اهمیـــت، تحقیقات قابل توجهی در حوزه تفکر نســـبیتی انجام شده اســـت. برای نمونه، لو و واتانابـــه، (۱۹۹۷) در پژوهش خود، دریافتند که اســـاس تفکر نســـبیتی تفکر ضربی[۱۸] است که برای شـــناخت درصدها، شـــیب خط، مثلثـات و جبر نیز، مورد نیاز اســت. این در حالی اســـت که بســـیاری از الگوهـــای بدفهمی دانش‌آموزان در رابطه با مســـائل استدلال نســـبیتی، نشـــان می‌دهد که آن‌ها از تفکر تجمعی[۱۹] به‌جای تفکر ضربی اســـتفاده می‌کنند که می‌تواند باعث ایجاد بدفهمی در درک نسبیتی شود. این پژوهشگران معتقدند که آشنا کردن دانش‌آموزان با مسائل ضرب و تقسیم معمولی، نمی‌تواند به آن‌ها، جهت گسترش درک تفکر نسبیتی کمک کند، چون اکثر دانش‌آموزان، معمولاً با قاعده‌ای که یاد گرفته‌اند، مسائل را حل کرده و کمتر توجهی به مفهوم‌ها دارند. هم‌چنین در کتاب‌های درسی ریاضی، عدم ارتباطی بین روش‌هـــای به‌کار رفتـــه توســـط دانش‌آموزان و روش‌های ارائه شـــده در کتاب‌هـــا وجود دارد که این امر، مشکلات یادگیری کســـر، را بیشتر می‌کند. این در حالی است که هدف تفکر نسبیتی، ایجاد برقراری نسبت‌ها و حل آن‌هاست که اغلب شهودی و وابسته به زمینه و مبتنی بر روش‌های نمادین/ رســـمی‌اند و عمدتاً بر اســـاس جمع کردن و ترکیـــب اعدادند که دانش‌آموزان ترجیح می‌دهند از آن‌ها، استفاده کنند. ایـــن در حالی اســـت که در اغلب کتاب‌های درســـی ریاضی، بیشتر از قاعدهٔ طرفین- وسطین که مستقل از زمینه و شـــهود اســـت، برای حل مســـائل تناسب استفاده شده است. (هارت[۲۰]، ۱۹۸۴)

۳-۱. دسته‌بندی اشتباهات دانش‌آموزان در حل مسائل نسبیتی

در این قســـمت، از مثال (۱) که در «ســـند مرکز همکاری‌های ال‌پاسو برای تعالی آموزشی» (۲۰۰۷، ص.۵) آمـــده، برای توضیح دســـته‌بندی اشـــتباهات دانش‌آموزان، استفاده می‌شود.

مثال (۱)

در شـــکل مقابل، قد دو آدمک به وسیلهٔ دو گیرهٔ کوچک و بزرگ، اندازه‌گیری شده است. با استفاده از گیـــرهٔ بزرگ، قد آدمک بلند شـــش گیره و قد آدمک کوتـــاه چهار گیره اســـت. اگر طول قـــد آدمک کوتاه



آدمک بلند　　آدمک کوتاه

به اندازهٔ شـــش گیرهٔ کوچک باشـــد، قد آدمک بلند، به‌اندازه چند گیرهٔ کوچک است؟

کارپلاس[۲۱] و پترســـون[۲۲] (۱۹۷۰) (نقل شده در سند مرکز همکاری‌های ال‌پاسو برای تعالی آموزشی، ۲۰۰۷، ص. ۸)، دلیل اشـــتباهات دانش‌آموزان را در مســـائل نسبیتی از این نوع، به‌صورت زیر دسته‌بندی کردند:

۱. درک مســـتقیم یـــا دریافـــت شـــهودی[۲۳]: دانش‌آموز تصمیمی بر اساس ظاهر عوامل غیراصلی در مسئله می‌گیرد و با استفاده از روش‌های غیرکمی، عملی را انجام می‌دهد.

۲. محاسبهٔ شـــهودی[۲۴]: دانش‌آموزان از برخی داده‌ها اســـتفاده کرده و بر روی آن‌ها بدون استدلال خاصی، اعمال ریاضی انجام می‌دهند.

۳. روش تفاوت‌های ثابت[۲۵]: یافته‌های تحقیقی نشان داده‌اند که تفاوت‌های ثابت یا روش جمع کردن موقع کار کردن با تناسب، تا به حال پرخطاترین روش به‌کار رفته توســـط دانش‌آموزان بوده اســـت. در این روش، دانش‌آمـــوزان به جای توجه به خارج‌قســـمت، برای به‌دســـت آوردن مقدار نامعلوم در تناســـب دوم، به تفاوت ثابت بین اعداد در صورت و مخرج کســـرها توجـــه می‌کنند. برای نمونه، در مثـــال آدمک بلند و آدمک کوتـــاه تعداد زیادی از دانش‌آموزان، برای حل تناســـب $\frac{x}{6}=\frac{6}{4}$ گفته بودند که چون در کســـر اول، اختلاف بین صورت و مخرج دو اســـت، پس در کسر دوم نیز باید همین اختلاف وجود داشته باشد که در این صورت، $x=8$، است.

۴. مقایســـه[۲۶]: گاهـــی دانش‌آمـــوزان، برای حل مسئله‌ای که از آن‌ها خواسته شده دو کمیت را با هم مقایسه کنند؛ از یک مقیاس آشنا استفاده می‌کنند، بدون آنکه در صورت مســـئله، اطلاعاتی در مورد آن

داده شـــده باشــد. برای مثال، در سؤال آدمک بلند و کوتاه، بعضی از دانش‌آموزان گفته بودند که گیره دوم نصف گیره اول اســت. در حالی که در صورت سؤال به این موضوع اشاره نشده بود.

۳-۲. عوامل مشکل‌ساز

از نظـر نِیبــورز[۲۷] (۲۰۰۲ نقـل شــده در ســند مرکـز همکاری‌های ال‌پاســو برای تعالی آموزشـــی، ۲۰۰۷) تفکر نســبیتی و توانایی اســتدلالی، به‌عنوان ســنگ‌بنای ریاضیات دوره متوسطه دیده می‌شود، اما به گفته پیرن[۲۸] و اســتفنز[۲۹] (۲۰۰۴)، یکی از عوامل مسئله‌ساز برای دانش‌آموزان در رابطه با مفهوم کسر، تعمیم اعمال اعداد حســابی به کسرهاســت. مثلاً اگر دانش‌آموز، کوچک‌تر شــدن در تقسیم اعداد حسابی را به کســرها تعمیم دهد، ممکن اســت انتظار داشته باشــد که در تقسیم دو کســر نیز، همین اتفاق بیفتد که این دوگانگی، برایش مســئله ایجــاد می‌کند. این پژوهشــگران، برای رویارویی با این چالش، اســتفاده از بازنمایی‌های چندگانه شــامل مدل‌های گسسته و پیوسته را برای نمایش کسرها و انجام عملیات با آن‌ها، توصیه می‌کننــد. هم‌چنین، برای تســهیل یادگیری کسر، در بیشتر کتاب‌های درسی ریاضی دیده می‌شود. مخصوصاً به دانش‌آموزان نشان داده می‌شود که چگونه اطلاعات را در مسائل تناسب، به‌عنوان معادله کسری بنویســند و آن را از طریق ضرب و سپس تقسیم حل کنند. نکته اصلی این اســت که در کسر، صورت کسر معرف جزئی از کل و مخرج کسر معرف کل است، در حالی که در نسبت، ممکن است هم صورت کسر و هم مخرج کسر، هر دو جزئی از کل باشند. به‌عبارت دیگر، کسرها خود زیرمجموعه‌ای از نسبت‌ها هستند و همین حقیقت، چنین ارتباطی را بین کســرها و نســبت‌ها، ناکارامد می‌کند. مثال زیر، برگرفته شده از «سند مرکز همکاری‌های ال‌پاســو برای تعالی آموزشی» (۲۰۰۷، ص. ۵) است که معرف این مشکل است.

مثال (۲)

برای درست کردن شربت پرتقال، ترکیب ۳ لیوان آب و دو لیوان عصاره پرتقال شیرین‌تر می‌شود یا چهار لیوان آب و ۳ لیوان عصاره پرتقال؟ یا اینکه شربت با هر دو ترکیب، به یک اندازه شــیرین می‌شود؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

دانش‌آموزان برای مقایسه شیرینی شربتی که با این دو ترکیب درســت شده، لازم است دو کمیت $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۳}{٤}$ را با هم مقایســه نموده و بررســی کنند که آیا این دو کمیت با هم برابرند یا خیر و اگر نیستند، کدام یک بیشتر از دیگری است. در این مثال، هم صورت و هم مخرج این دو کسر، «جزء» هستند.

این مثال، بیانگر این است که استفاده از رویکرد تلفیقی کسر و نســبت در کتاب‌های درسی ریاضی، به درک بهتر مفهوم کســر کمک می‌کند، در صورتی که فقدان آن، باعث سردرگمی دانش‌آموزان می‌شود (نورتون[۳۰]، ۲۰۰۵). این در حالی اســت که در اغلب کتاب‌های درســی ریاضی، معرفی **کســر** و **نســبت** به‌صــورت جداگانه انجام می‌گیــرد، در حالی که این دو بــه هــم مرتبط بــوده و به‌طور دقیق‌تر، کســرها زیرمجموعه‌ای از نسبت هستند.

در مطالعات صورت‌گرفته توسط تورنیر (۱۹۸۵، نقل شــده در ســند مرکز همکاری‌های ال‌پاسو برای تعالی آموزشــی، ۲۰۰۷)، متغیرهایی که بر پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان در یادگیری نســبت و تناسب تأثیر می‌گذارند، به‌صورت زیر فهرست‌بندی شده‌اند:

۱. «متغیرهای ســاختاری»، مربوط به ســاختار اعداد و نسبت در مسئله می‌شود.

متغیرهای ســاختاری مســئله تناســبی، شامل نسبت‌های اعداد صحیح، ترتیب، اعداد نامعلوم، اندازه اعداد و کاربرد نسبت‌های واحد است و در مسئله‌های مقایسه‌ای، برابری نسبت‌ها را بررسی می‌کند.

۲. «متغیرهای متنی» با چگونگی وجود مســئله سروکار دارد.

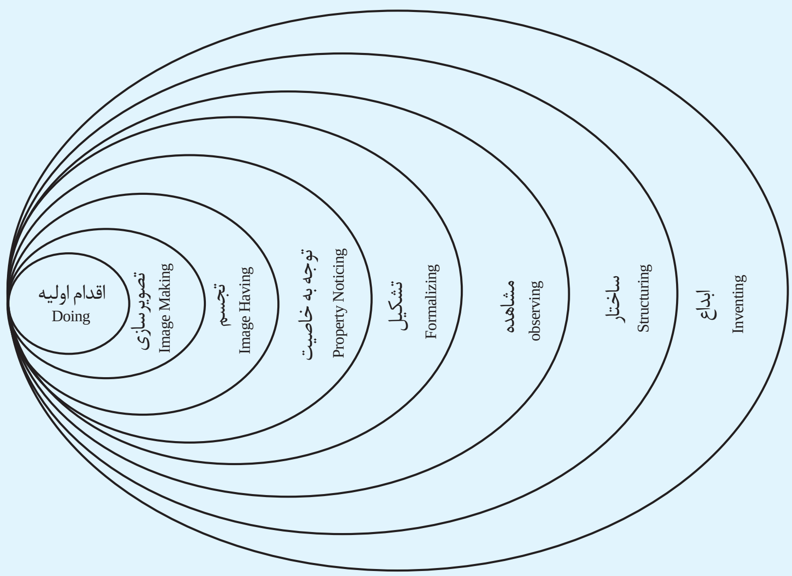
آشــنایی دانش‌آموزان با متن مسئله، فهمیدن و دستکاری درست آن و توانایی ایجاد مدلی برای نشان دادن و حل آن مســئله، به‌طور چشــم‌گیری عملکرد دانش‌آموزان را در رابطه با کسرها، ارتقا می‌بخشد.

۳. «متغیرهای دانش‌آموزی» که به جای ساختار یا متن مسئله، به دانش‌آموزان توجه می‌کند.

این متغیر بدین معناســت کــه دانش‌آموزانی که نســبت به ریاضی دید مثبتی دارند، در حل مســائل نسبیتی، عملکرد بهتری نسبت به دانش‌آموزانی دارند که باور دارند در درس ریاضی ضعیف هستند.

۴. مدل تام‌کی‌یِرِن در مورد رشد یادگیری ریاضی (با تأکید بر کسر)

پی‌یرِی[۳۱] و کی‌یرن (۱۹۸۸)، مدلی برای یادگیری ریاضی با استفاده از هشت مرحله معرفی کردند و آن را به‌صورت دایره‌های هم‌مرکز نشان دادند. از نظر آن‌ها لازم نیست که حرکت بین این مراحل، از کوچک‌ترین دایره به سمت بزرگ‌ترین دایره صورت گیرد، یعنی، رابطه بین دایره‌ها، رابطه‌ای خطی نیست، بلکه برعکس، یادگیرنده می‌تواند با حرکات رفت و برگشتی، دانش خود را بر اساس بازگشت به مراحل قبلی، افزایش دهد، به عبارت دیگر یادگیرنده با بازگشت به مراحل قبلی، دانش جدیدی را کسب، یا دانش قبلی خود را تصحیح می‌کند که به او در مراحل بعدی، کمک خواهد کرد.



شکل ۱: مدل پی‌یرِی و کی‌یِرن (۱۹۸۸) برای رشد یادگیری ریاضی

برای آشنایی بیشتر با این مدل، به شرح اجمالی مراحل آن می‌پردازیم.

اقدام اولیه[۳۲]: اقدام اولیه، شروع هر عملی است و مبتنی بر دانش اولیه‌ای است که دانش‌آموز در اختیار دارد و اساس و نقطه شروع توسعه یادگیری است. در مراجعه به کسرها، توانایی دانش‌آموزان در تقسیم (به‌عنوان مثال تقسیم یک پیتزا)، اقدام اولیه را برای انجام کار ایجاد می‌کند.

تصویرسازی[۳۳]: در این مرحله، تصویرها در طول عملیات مخصوص، شروع به شکل‌گیری می‌کنند، جایی‌که یادگیرنده می‌تواند دانش خود را در موقعیت‌های جدید به‌کار برد، مثلاً یادگیرنده بتواند از دانشی که در فهم کسر به‌دست آورده، در حل مسائل غیرکسری استفاده کند.

درونی‌سازی تصویر[۳۴]: با توجه به فعالیت‌های انجام گرفته در مرحله تصویرسازی، یادگیرنده تصویرها و شکل‌های ذهنی را برای خود، درونی می‌کند. در واقع کسرها، یک موضوع ذهنی برای یادگیرنده می‌شود و او می‌تواند از کسر، تجسمی در ذهن خود ایجاد کند.

توجه کردن به خاصیت‌ها[۳۵]: این مرحله، بازگشت به مراحل قبلی است. که در آن، یادگیرنده می‌تواند با استفاده از طرحواره‌های ذهنی قبلی، الگوها و خصوصیات و ارتباطات جدیدی را بسازد و توسعه دهد، خواص و روابط بین آن‌ها را کشف کند. برای مثال، یادگیرنده ممکن است یک رشته از کسرهای مساوی را تصور نماید که از یک کسر اولیه، تولید شده است.

انتزاع: در این مرحله، یادگیرنده بین تصویرها، طرحواره‌های ذهنی خود و دانشی که دریافت کرده، رابطه برقرار می‌کند. برای مثال، در این مرحله، یادگیرنده تشخیص می‌دهد که هر عدد کسری را می‌توان به‌صورت $\frac{a}{b}$ تعریف نمود، به‌طوری که در آن $b \neq 0$.

مشاهده[۳۶]: یادگیرنده با مشاهده فرایند فکری خود و ساماندهی آن‌ها، توانایی ساختن دانش جدید را پیدا می‌کند. برای مثال، یادگیرنده مشاهده می‌کند که «کوچک‌ترین عدد کسری مثبت» وجود ندارد، چون اگر مخرج کسری مانند $\frac{a}{b}$ را هرچقدر بزرگ‌تر کنیم، کسر کوچک‌تر و نزدیک‌تر به صفر می‌شود، ولی باز هم کسرهای کوچک‌تری به‌وجود می‌آیند و این کار، تداوم دارد.

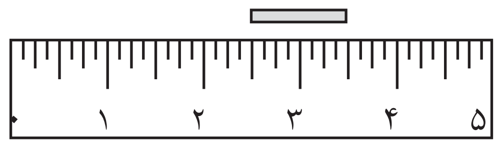
ساختار[۳۷]: در این مرحله، یادگیرنده مشاهدات خود را با استفاده از نتایج نظام‌دار مراحل قبلی، ساماندهی می‌کند و صورت‌بندی منسجم‌تری از آن‌ها، به‌وجود می‌آورد.

ابداع[۳۸]: پس از مراحل فوق است که یادگیرنده، توانایی درک یک مفهوم را به عنوان یک کل، پیدا می‌کند و بدون زیرورو کردن و تجزیه نمودن ساختار آن مفهوم برای درک عمیق‌تر، به ابداع روش‌های جدیدی در ذهن خود می‌پردازد که با روش‌های پیشین، می‌تواند کاملاً متفاوت باشد.

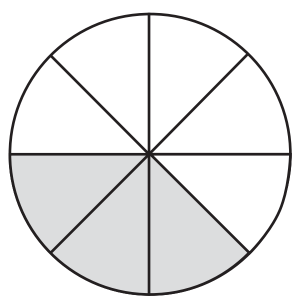
۲-۷. دسته‌بندی بدفهمی‌ها در رابطه با کسر

در مطالعات مختلفی که توسط اَسکیو (۲۰۰۲)، بل (۲۰۰۵) و سـوان (۲۰۰۶) صورت گرفته، برخی از اشـتباهات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان در رابطه با کسـرها، شناسایی شدند. با تعمق در این بدفهمی‌ها، می‌توان مراحل مختلف مدل کی‌یِرن و چرایی ایجاد بدفهمی‌های زیر را که ناشی از توسعه نیافتن مراحل این مدل در دانش‌آموزان مختلف است مشاهده نمود.

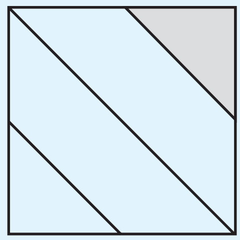
۱. بعضی از دانش‌آموزان برای اندازه‌گیری اشـیا گمان می‌کنند که همیشه باید از مبداء شروع کنند. بـرای مثـال، بعضـی از دانش‌آموزان در مثـال زیر، طول خط را $۳\frac{۱}{۲}$ سـانتی‌متر در نظـر می‌گیرند که نشـان‌دهنده این اسـت که طول خط را، از مبداء در نظر گرفته‌اند.



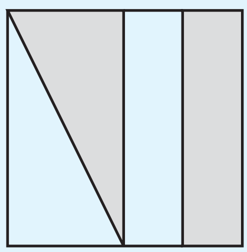
۲. یکی دیگر از بدفهمی‌های متداول این اسـت کـه با وجودی که کسـر جزئـی از کل اسـت، ولی بعضی دانش‌آموزان، کسـر را به‌صورت جزئی از جزء می‌نویسـند که مثال زیر، یکی از آن‌هاست که در آن برای شـکل زیر، دانش‌آموز کسـر $\frac{۳}{۵}$ را به جای $\frac{۳}{۸}$ نوشته است.



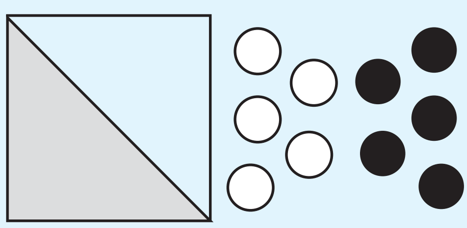
۳. گاهـی دانش‌آمـوزان، برای به‌دسـت آوردن کسـری از کل یک طول یا یک مسـاحت، این نکته را در نظر نمی‌گیرند که وقتی از کسـری از کل بحث می‌شود، منظور اجزایی با اندازه‌های مساوی است که نمونه مقابل، یکی از آن‌هاست.



۴. گاهـی هم عده‌ای تصور می‌کنند که کسـری از کل یا اجزاء، باید قسمت‌هایی با شکل‌های یکسان باشـند و بدین‌سبب، نمونه‌هایی مانند زیر را به دلیل مشابه نبودن جزءها، نمی‌توانند به‌صورت کسر تعریف کنند.



۵. بعضـی اوقـات، دانش‌آمـوزان نمی‌دانند که کسـرها هم عدد هستند. برای همین، با وجودی که کسـری مانند $\frac{۱}{۲}$ را در موقعیت‌هایی مثل شکل‌های زیر می‌توانند نشـان دهند، ولی قادر به تشـخیص همین عدد روی محور اعداد نیستند، زیرا تصورشان این اسـت کـه $\frac{۱}{۲}$ یک عدد نیسـت، بلکه یک جزء است.

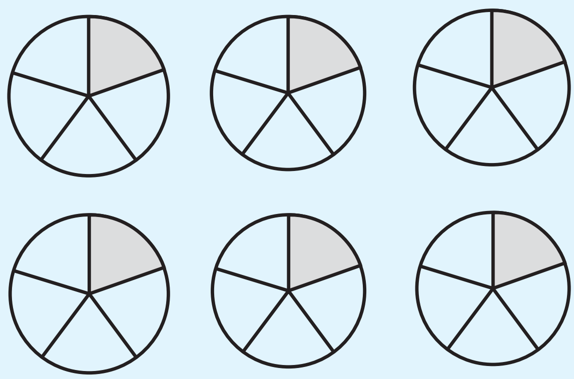


۶. گاهـی دانش‌آموزان فکـر می‌کنند که اعداد مخلـوط بزرگ‌تر از کسـر هسـتند، زیـرا هر عدد مخلـوط شـامل یک عـدد کامل اسـت و این امر، سبب می‌شـود که تصور کنند که آن عدد مخلوط، بزرگ‌تر از کسر اسـت، مثل اینکه عدد مخلوط $۱\frac{۴}{۵}$

را بزرگ‌تر از $\frac{۹}{۵}$ می‌بینند، در صورتی‌که هر دو، با هم‌مساوی‌اند.

۷. بسیاری از دانش‌آموزان، کسر را کوچک‌تر از یک می‌دانند که ممکن است علت آن، شروع آموزش کسر باشد که اغلب، کسرها به منزله جزئی از کل با صورت کوچک‌تر از مخرج، معرفی می‌شوند.

۸. گاهی پیش می‌آید که دانش‌آموزان، اجزا را بدون توجه به کل، می‌شمارند، برای همین، تصور می‌کنند که مثلاً $\frac{۱}{۵}$ شش دایره را با اندازه‌های مختلف، در کل با هم ببینند و شکل زیر را، نشان‌دهنده کسر $\frac{۶}{۳۰}$ بدانند.



۹. اگر بدفهمی بالا تعمیم یابد، دانش‌آموزان به برابری کسرها توجه می‌کنند، اما به این نکته دقت نمی‌کنند که مثلاً $\frac{۱}{۴}$ از ۲ کیلومتر، با $\frac{۱}{۴}$ از ۸ کیلومتر، مقدارهای متفاوتی هستند.

۱۰. گاهی دانش‌آموزان علامت کسر را با علامت اعشار اشتباه می‌گیرند.

۱۱. یکی از بدفهمی‌های دانش‌آموزان در رابطه با کسرها این است که عددهای صورت یا مخرج را مستقل از اینکه جایگاهشان کجاست، با هم مقایسه می‌نمایند. مثل اینکه بعضی‌ها $\frac{۱}{۸}$ را بزرگ‌تر از $\frac{۱}{۶}$ می‌دانند، زیرا به تصور آن‌ها، عدد ۸، بزرگ‌تر از عدد ۶ است.

۱۲. گاهی دانش‌آموزان تصور می‌کنند که کسرهایی که دارای مخرج‌های کوچک‌تر هستند، همیشه بزرگ‌ترند، بدون اینکه برای مقایسه، به صورت کسرها هم توجه کنند. این بدفهمی را می‌توان در مثال‌هایی مانند این دید که بگویند $\frac{۳}{۵}$ کوچک‌تر از $\frac{۱}{۴}$ است زیرا $\frac{۱}{۴}$ بزرگ‌تر از $\frac{۱}{۵}$ است.

۱۳. برخی از دانش‌آموزان، قادر به تشخیص کسرهای مساوی که به‌صورت‌های متفاوت نمایش داده شده‌اند، نیستند. مثلاً این بدفهمی نمی‌گذارد درک کنند که $\frac{۲}{۴}$ با $\frac{۳}{۶}$ مساوی است و آن‌ها را دو کسر متفاوت می‌دانند، زیرا هر دو صورت و هر دو مخرج، با هم متفاوت‌اند.

۱۴. یکی از بدفهمی‌های رایج این است که بعضی از دانش‌آموزان، برای ساختن کسرهای مساوی به جای ضرب صورت و مخرج در مقداری ثابت صورت و مخرج کسر را با عدد ثابتی جمع می‌کنند. مانند اینکه برای ساختن کسری مساوی $\frac{۳}{۸}$، عمل $\frac{۳+۱}{۸+۱}$ را مجاز دانسته و به کسر $\frac{۴}{۹}$ می‌رسند.

۱۵. بدفهمی دیگر در رابطه با عملیات با کسرها این است که دانش‌آموزان برای جمع دو کسر، صورت‌ها را در هم و مخرج‌ها را نیز در هم ضرب می‌کنند. مثل اینکه برای جمع $\frac{۳}{۵}+\frac{۱}{۲}$، عمل $\frac{۳}{۱۰}=\frac{۳\times۱}{۵\times۲}$ را انجام می‌دهند.

۱۶. بعضی دانش‌آموزان، برای جمع کردن کسرها، صورت‌ها را با هم و مخرج‌ها را با هم جمع می‌کنند، مثل $\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۵}=\frac{۴}{۹}$.

۱۷. یکی از بدفهمی‌های شایع در مورد عمل تقسیم با کسرها، تعمیم تفکر تقسیم اعداد صحیح به اعداد کسری است مثل تقسیم کردن عدد صحیح ۴ به عدد کسری $\frac{۱}{۲}$ که به جای آن، عدد را بر ۲ تقسیم می‌کنند، مثل $۴\div\frac{۱}{۲}=۲$.

۱۸. برعکس این عمل هم زیاد دیده می‌شود که هنگام تقسیم یک کسر به یک عدد صحیح، دانش‌آموزان مخرج کسر را به آن عدد تقسیم می‌کنند، مانند $\frac{۱}{۲۶}\div۲=\frac{۱}{۱۳}$.

۱۹. موقع ضرب یک عدد در یک کسر بعضی‌ها، هم صورت و هم مخرج کسر را در آن عدد ضرب می‌کنند مثل $۴\times\frac{۵}{۶}=\frac{۲۰}{۲۴}$.

پی‌نوشت‌ها

1. Proportional Thinking
2. Murdock
3. Stewart
4. Ohlsson
5. Tom-Kieren
6. *Part-Whole Relationship*
7. *Measure*
8. Operator
9. Quotient
10. Ratio
11. Lamon
12. Lo
13. Watanabe
14. Lesh & Post & Behr
15. The Elpaso Collaborative for Academic Exellence
16. National Assessment of Educational Progress: NAEP
17. Parish , Sparrow , kissane & Hurst
18. Multiplicative Thinking
19. Collective Thinking
20. Hart
21. Karplus
22. Peterson
23. Intuition
24. Intuitive computation
25. Constant Differences Method
26. *Scaling*
27. Nabors
28. Pearn
29. Stephens
30. Norton
31. Pirie
32. Primitive Doing
33. Image Making
34. Image Having
35. Property Noticing
36.Observing
37. Structuring
38. Inventing

منابع

1. Askew, M. (2002). The changing primary mathematics classroom- the challenge of the National Numeracy Strategy. In L. Haggerty (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: Perspectives on Practice.* London: Routledge Falmer.

2. Bell, A. (2005). Introduce Diagnostic Teaching. Alan Bell and the Toolkit Team. *A Strategy in the Toolkit for Change Agents.* MARS, Michigan State University.

3. Swan, M. (2006). *Improving Learning in Mathematics: Challenges and Strategies* (Standards Unit). Department for Education and Skills Standards Unit. University of Nottingham.

4. Lamon, S.J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp. 629- 666). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

5. The El Paso Collaborative for Academic Exellence (2007). Proportional Reasoning: Student Misconception and Strategies for Teaching.

6. Murdock Veon & Stewart. (2005). Making of student’s understanding of fraction: An exploratory study of sixth grader’s construction of fraction concepts through the use of physical referents and real word representations. The Florida state university college of education. October 12, 2005.

7. Hart, K.M. (1984). *Ratio: Children’s strategies and errors.* A report of the strategies anderrors in secondary mathematics project. London: NFER-Nelson.

8. Lesh, R, Post, T, & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.93- 118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates & National Council of Teachers of Mathematics.

9. parish, L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (2006). *Shaping the future of mathematics education*: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Fremantle: MERGA.

10. Stephen j.Norton, In Chick, H.L. & Vincent, J. L. (2005). Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4, pp. 17- 24. Melbourne: PME.

11. Lo, J. & Watanabe, T. (1997). Developing ratio and proportion schemes: Astory of a fifth grader. Journal for Research in Mathematics Education, 28(2), 216- 236.

12. Kieren,T. (1976). Pieri, S.; kieren,T. (1988).